

РІВНЕНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ГУМАНІТАРНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ

**ВОЛИНСЬКИЙ  
МАТЕМАТИЧНИЙ  
ВІСНИК**

**СЕРІЯ  
ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА**

*Збірник наукових праць*

**Випуск 2 (11)**

Рівне-2004

"Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика" публікує результати досліджень з математичного моделювання і обчислювальних методів та суміжної проблематики в галузі математики, інформатики, механіки. Розрахований на наукових працівників, викладачів вузів, аспірантів та студентів старших курсів.

"Волинский математический вестник. Серия прикладная математика".  
The "Volyn Mathematical Bulletin. Applied Mathematics Series".

*Редакційна колегія*

Барановський С.В. ( <i>секретар</i> )	Ляшенко І.М.
Бейко І.В.	Мельник В.С.
Бомба А.Я. ( <i>відповідальний редактор</i> )	Недашківський М.О.
Булавацький В.М.	Новіков О.М.
Бурак Я.Й.	Петрівський Б.П.
Власюк А.П.	Пономаренко Л.А.
Войтович М.М.	Пригорницький Д.О. ( <i>технічний секретар</i> )
Гарашенко Ф.Г.	Савула Я.Г.
Гарбарчук В.І.	Свідзинський А.В.
Дейнека В.С.	Скопечкий В.В. ( <i>головний редактор</i> )
Джунь Й.В.	Сяський А.О.
Каптан С.С. ( <i>технічний секретар</i> )	Турбал Ю.В.
Кратко М.І.	Чикрій А.О.
Кузьменко А.П.	Шваб'юк В.І.
Кундрат М.М.	Янчук П.С.

Видається у Рівненському державному гуманітарному університеті при сприянні Інституту кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, навчальних закладів та наукових товариств Волинського регіону. Друкується за ухвалою Вченої ради РДГУ (протокол №10 від 28.05.2004 р.).

Адреса редакції: 33028, Україна, м. Рівне, вул. Остафова, 31,  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
кафедра інформатики та прикладної математики, редакція ВМВ.  
Тел.: 8(0362)260-444 . E-mail: vmv@rdgu.rv.ua

## Зміст

<i>Наші вітання СКОПЕЦЬКОМУ ВАСИЛЮ ВАСИЛЬОВИЧУ</i> .....	5
<b>Барановський С.В., Бомба А.Я., Скопецький В.В.</b> Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії та моделювання процесів деформацій русла на ділянках планового розширення та повороту русла .....	7
<b>Бомба А.Я., Кашитан С.С.</b> Методи фіктивних ділянок та квазі-конформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач в областях з вільними межами .....	17
<b>Вальковський В.О., Соловей І.А.</b> До проблеми оптимальної синхронної реалізації обчислень на клітинних автоматах .....	29
<b>Власюк А.П., Мартинюк П.М.</b> Фільтраційна консолідація неоднорідного масиву ґрунту в неізотермічних умовах з урахуванням впливу переносу солей .....	39
<b>Возняк О.Г.</b> Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь .....	54
<b>Гайвась Б.І.</b> Про вплив електроосмосу на двостороннє конвективне осушення пористого шару .....	74
<b>Дейнека О.Ю.</b> Періодичні розв'язки системи телеграфних рівнянь .....	86
<b>Емець Є.М.</b> Про еквівалентність задач цілочислового програмування та задач оптимізації на полірозміщеннях .....	91
✓ <b>Емець О.О.</b> Розв'язок безумовної задачі есклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією .....	95
✓ <b>Емець Ол-ра О.</b> Одна задача комбінаторної оптимізації на переставленнях нечітких множин .....	101
<b>Емець О.О., Черненко О.О.</b> Математичне моделювання деяких економічних проблем задачами оптимізації на розміщеннях з дробово-лінійною функцією цілі .....	107
<b>Зарівняк І.С.</b> Імовірність критичного стану клеєних швів шарової пластини з початковими неправильностями .....	113
<b>Климюк Ю.Є., Присяжнюк І.М.</b> Моделювання процесів конвективно-дифузійного переносу у випадку многочленної залежності коефіцієнта дифузії від концентрації .....	121
<b>Кузьменко А.П., Кузьменко В.М.</b> Чисельно-аналітичний розв'язок просторових крайових задач з вільною межею для одного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних .....	130

$$F^* = F(g^*) = \frac{2+3 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{2+2 \cdot 1 + 3 \cdot 3} = \frac{11}{13}.$$

**Висновки.** Таким чином, в цій роботі розв'язана задача мінімізації на переставленнях дробово-лінійної функції. У перспективі цікавим було б дослідити можливість отримання розв'язку задачі мінімізації дробово-лінійної функції на розміщеннях, сполученнях та інших комбінаторних множинах за умови відсутності інших обмежень.

1. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. - Киев.: УМК ВО, 1992. - 92 с.
2. Стоян Ю.Г., Емец О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. - К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. - 188 с.
3. Емец О.О., Колечкіна Л.М., Недобачий С.І. Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. - Полтава: Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП "Легат", 1999. - 64 с.
4. Емец О.О., Колечкіна Л.М. Моделювання деяких прикладних задач оптимізаційними задачами з дробово-лінійною функцією цілі на переставленнях // Волинський математичний вісник. - Рівне: РДГУ. - 2000. - Вип. №7. - С.70-77.
5. Емец О.О., Колечкіна Л.М. Задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків // Український математичний журнал. - 2000. - Т. 52, №12. - С. 1630 - 1640.
6. Емец О.А., Недобачий С.И., Колечкина Л.Н. Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках // Дискретная математика. - 2001. - Т. 13, Вып. 1. - С. 110-118.
7. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и систем. анализ. - 2004. - №3. - С.30-43.

Полтавський університет споживчої кооперації України, Полтава

E-mail: slemets@e-mail.pl.ua

Надійшла 10.12.2004

**Емец О.А.** РЕШЕНИЕ БЕЗУСЛОВНОЙ ЗАДАЧИ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ С ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ // Получено аналитическое решение задачи оптимизации дробно-линейной функции, которая задана на множестве перестановок.

**Yemets O.O.** A SOLUTION OF UNCONDITIONAL EUCLIDEAN COMBINATORIAL PROBLEM ON PERMUTATIONS WITH A HOMOGRAPHIC OBJECTIVE FUNCTION // An analytical solution of the optimization problem of a homographic function given on a set of permutations was received.

УДК 519.85

Ємець Ол-ра О.

ОДНА ЗАДАЧА КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ НА  
ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

*Побудовано нову математичну модель однієї задачі упакування прямокутників як задачі комбінаторної оптимізації на множині переставлень, елементами якої є нечіткі множини.*

**Вступ.** Розвиток комбінаторної оптимізації [1-15], необхідність врахування невизначеності даних, яка наявна при моделюванні явищ, складних об'єктів, систем, визначає актуальність побудови і дослідження математичних моделей на основі комбінаторних задач оптимізації, що враховують різні види невизначеності.

Задача, що розглядається у цій роботі, в детермінованій постановці досліджена в роботах [1, 2, 6]. Проблеми врахування невизначеності даних в таких задачах на основі положень інтервальної математики розглядались у [10, 12]. Цей підхід не завжди виправдовує себе, оскільки часто більш адекватним для опису невизначеності є апарат нечітких множин [15, 16]. У цій роботі, на прикладі однієї задачі упакування прямокутників, продемонструємо підхід до урахування такого роду невизначеностей шляхом побудови відповідних нових математичних моделей у вигляді комбінаторних оптимізаційних задач на переставленнях з використанням апарату нечітких множин.

**Побудова математичної моделі.** Нехай є деяка напівнескінчена (достатньо довга) смуга, яка розділена на смужки однакової ширини  $h$ . Задано ще  $p$  прямокутників однакової ширини  $h$ , довжини яких –  $a_1, \dots, a_p$ . Задача полягає у розміщенні прямокутників без накладань у смугі від її початку таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімально можливою.

Побудуємо математичну модель цієї задачі, вважаючи, що довжини прямокутників задаються нечіткими числами [16], тобто  $a_i = \{(g_1 | \mu_1), \dots, (g_{q_i} | \mu_{q_i})\}$ , де  $\{g_1, \dots, g_{q_i}\}$  – носій нечіткої множини  $a_i$ , а  $\{\mu_1, \dots, \mu_{q_i}\}$  – множина значень функції приналежності.

Очевидно, в оптимальному варіанті у кожній смужці можна розмістити від одного до  $p - (m - 1) = p - m + 1$  прямокутників, де  $m$  – це кількість смужок, на яку розділено смугу (ціла частина частки від ділення ширини смуги на  $h$ ). Позначимо  $n = m(p - m + 1)$  та розглянемо  $n - p$  прямокутників з шириною  $h$  та довжиною  $a_0$ , де  $a_0$  є нечітким числом вигляду  $a_0 = \{(0 | 1)\}$  (тобто звичайним нулем).

Тоді можна вважати, що в кожній смужці розміщено рівно  $p - m + 1$  прямокутників. Позначимо  $x_{ij}$  – нечітку довжину прямокутника, що знаходиться у  $i$ -ій смужці на  $j$ -ому від початку смуги місці,  $i \in J_m$ ,  $j \in J_{p-m+1}$  (тут і далі через  $J_m$  позначається множина перших  $m$  натуральних чисел).

Розглянемо вектор  $x$  вигляду:

$$x = (x_{11}, \dots, x_{1,p-m+1}, x_{21}, \dots, x_{2,p-m+1}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{i,p-m+1}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{m,p-m+1}).$$

Утворимо мультимножину  $G = \{a_1, \dots, a_p, a_0, \dots, a_0\}$ , в якій елемент  $a_0$  зустрічається  $n - p$  раз. Тоді вектор  $x$  можна розглядати як елемент множини  $E_n(G)$  переставлень з елементів мультимножини  $G$ , тобто  $x \in E_n(G)$ . При цьому, кожному переставленню  $x$  відповідатиме певне розташування прямокутників у смугі і навпаки. Під сумою двох нечітких чисел  $A = \{(a_1 | \mu_1^A), \dots, (a_k | \mu_k^A)\}$  і  $B = \{(b_1 | \mu_1^B), \dots, (b_l | \mu_l^B)\}$  розумітимемо [16] нечітке число  $A + B$ , яке утворюється за допомогою побудови множини пар

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \left\{ \left( \tilde{c}_1 \mid \mu_1^{\tilde{C}} \right), \dots, \left( \tilde{c}_\eta \mid \mu_\eta^{\tilde{C}} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left( a_1 + b_1 \mid \min \left[ \mu_1^A, \mu_1^B \right] \right), \dots, \left( a_1 + b_l \mid \min \left[ \mu_1^A, \mu_l^B \right] \right), \right. \\ &\quad \left( a_2 + b_1 \mid \min \left[ \mu_2^A, \mu_1^B \right] \right), \dots, \left( a_2 + b_l \mid \min \left[ \mu_2^A, \mu_l^B \right] \right), \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left. \left( a_k + b_1 \mid \min \left[ \mu_k^A, \mu_1^B \right] \right), \dots, \left( a_k + b_l \mid \min \left[ \mu_k^A, \mu_l^B \right] \right) \right\}.\end{aligned}$$

Перші елементи  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta$ , де  $\eta = kl$ , цих пар утворюють мультимножину  $\tilde{C} = \{\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_\eta\}$ . Основа  $S(\tilde{C})$  мультимножини  $\tilde{C}$  ( $S(\tilde{C}) = \{c_1, \dots, c_r\}$ ) є носієм нечіткого числа  $A + B = \{(c_1 \mid \mu_1), \dots, (c_r \mid \mu_r)\}$ . Значення функції приналежності знаходяться за правилом:

$$\mu_i = \max_{\forall i \in J_\eta: c_i = \tilde{c}_i} \left\{ \mu_i^{\tilde{C}}, i \in J_\eta \right\}.$$

Тобто, значення  $\mu_i$  вибирається як максимальне серед чисел  $\mu_i^{\tilde{C}}$ , для яких  $\tilde{c}_i = c_i$ .

Під максимумом двох нечітких чисел  $A$  і  $B$  розумітимемо нечітке число  $\max(A, B)$ , яке утворюється побудовою з множини пар

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \left\{ \left( \tilde{c}_1 \mid \mu_1^{\tilde{C}} \right), \dots, \left( \tilde{c}_\eta \mid \mu_\eta^{\tilde{C}} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left( \max[a_1, b_1] \mid \min[\mu_1^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left( \max[a_1, b_l] \mid \min[\mu_1^A, \mu_l^B] \right), \right. \\ &\quad \left( \max[a_2, b_1] \mid \min[\mu_2^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left( \max[a_2, b_l] \mid \min[\mu_2^A, \mu_l^B] \right), \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left. \left( \max[a_k, b_1] \mid \min[\mu_k^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left( \max[a_k, b_l] \mid \min[\mu_k^A, \mu_l^B] \right) \right\},\end{aligned}$$

де основа  $S(\tilde{C})$  мультимножини  $\tilde{C}$  ( $S(\tilde{C}) = \{c_1, \dots, c_r\}$ ) є носієм нечіткого числа  $\max(A, B) = \{(c_1 \mid \mu_1), \dots, (c_r \mid \mu_r)\}$ .

Під мінімумом двох нечітких чисел  $A$  і  $B$  будемо розуміти нечітке число  $\min(A, B)$ , яке утворюється побудовою з множини пар

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \left\{ \left( \tilde{c}_1 \mid \mu_1^{\tilde{C}} \right), \dots, \left( \tilde{c}_n \mid \mu_n^{\tilde{C}} \right) \right\} = \\ &= \left\{ \left( \min[a_1, b_1] \mid \min[\mu_1^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left( \min[a_l, b_l] \mid \min[\mu_l^A, \mu_l^B] \right), \right. \\ &\quad \left( \min[a_2, b_1] \mid \min[\mu_2^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left( \min[a_2, b_l] \mid \min[\mu_2^A, \mu_l^B] \right), \\ &\quad \dots, \\ &\quad \left. \left( \min[a_k, b_1] \mid \min[\mu_k^A, \mu_1^B] \right), \dots, \left( \min[a_k, b_l] \mid \min[\mu_k^A, \mu_l^B] \right) \right\},\end{aligned}$$

де основа  $S(\tilde{C})$  мультимножини  $\tilde{C}$  ( $S(\tilde{C}) = \{c_1, \dots, c_r\}$ ) є носієм нечіткого числа  $\min(A, B) = \{(c_1 \mid \mu_1), \dots, (c_r \mid \mu_r)\}$ .

Використовуючи введені операції суми, знаходження максимуму і мінімуму, математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників представимо у вигляді: знайти

$$F^*(x^*) = \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}; \quad x^* = \arg \min_{x \in E_n(G)} \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^{p-m+1} x_{ij}.$$

**Висновки.** Таким чином, у цій роботі побудована нова математична модель однієї задачі упакування прямокутників як задачі комбінаторної оптимізації на множині переставлень нечітких множин. У перспективі доцільно розробити апарат математичного моделювання з використанням інших комбінаторних конфігурацій з нечітких множин, а також розробити методи і алгоритми розв'язання відповідних модельних задач.

1. Емец О.А. Евклидовы комбинаторные множества и оптимизация на них. Новое в математическом программировании: Учеб. пособие. - Киев.: УМК ВО, 1992. - 92с.
2. Стоян Ю.Г., Емець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. - К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. - 188 с.
3. Емец О.А. Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Украинский



- математический журнал. - 1994. - Т.46, №6. - С. 680-691.
4. *Емец О.А.* Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журнал вычислит. матем. и матем. физики - 1994. - Т. 34, №6. - С. 855-869.
  5. *Ємець О.О.* Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Дис. ... докт. фіз.-мат. наук (01.05.01). Харків, 1996. - 242 с. /Міносвіти України, Харків. держав. ун-т радіоелектроніки. ДР№0596U000411.
  6. *Емец О.А., Емец Е.М., Колечкина Л.Н.* Использование метода отсечений при раскросе // Радиоэлектроника и информатика. - 1998. - № 3. - С. 114-117.
  7. *Ємець О.О., Колечкіна Л.М., Недобачій С.І.* Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. - Полтава: Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП "Легат", 1999. - 64 с.
  8. *Ємець О.О., Колечкіна Л.М., Недобачій С.І.* Дослідження областей визначення задач евклідової комбінаторної оптимізації на переставних множинах. Ч. 2. Про одну задачу оптимізації на переставленнях. - Полтава: Полтавський державний технічний університет ім. Юрія Кондратюка, ЧПКП "Легат", 1999. - 32с.
  9. *Стоян Ю.Г., Ємець О.О., Ємець Є.М.* Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Доповіді НАНУ - 1999. - № 8. - С. 37-41.
  10. *Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г.* Задача цветной упаковки прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных и ее решение // Экономика и матем. методы. - 2000. -Т. 36, №3. - С. 149-152.
  11. *Ємець О.О., Ємець С.М.* Відсікання в лінійних частково комбінаторних задачах евклідової комбінаторної оптимізації // Доп. НАН України. - 2000. - №9. - С. 105-109.
  12. *Емец О.А., Евсеева Л.Г., Романова Н.Г.* Интервальная математическая модель комбинаторной задачи цветной упаковки прямоугольников // Кибернетика и системный анализ. - 2001. - №3. - С. 131 - 138.
  13. *Емец О.А., Колечкина Л.Н.* Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках // Кибернетика и систем. анализ. - 2004. - №3. - С.30-43.
  14. *Емец О.А., Барболина Т.Н.* Решение задач евклидовой комбинаторной оптимизации методом построения лексикографической эквивалентности // Кибернетика и систем. анализ. - 2004. - №5. - С.115-125.
  15. *Емец О.А., Емец А.О.* Комбинаторное множество нечетких размещений // Матеріали VII Міжнародної науково-практичної конференції "Наука і освіта - 2004" (10-25 лютого 2004 року ). Том 70. Математика. - Дніпропетровськ: Наука і освіта, 2004. - С.42-43.
  16. *Котман А.* Введение в теорию нечетких множеств. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.

Полтавський університет споживчої кооперації України, Полтава  
E-mail: slemets@e-mail.pl.ua

Надійшла 10.12.2004

**Емец А.О.** ОДНА ЗАДАЧА КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ // Построена новая математическая

модель одной задачи упаковки прямоугольников как задача комбинаторной оптимизации на множестве перестановок, элементами которой являются нечетные множества.

**Yemets O.O.** ONE COMBINATORIAL OPTIMIZATION PROBLEM ON PERMUTATIONS OF FUZZY SETS // *The new mathematical model of one problem of packing of rectangulars as a combinatorial optimization problem on permutations is constructed. Elements of set of permutations are fuzzy sets.*